УДК 539.374

В. В. Стружанов, С. В. Жижерин

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ПРОЦЕССА РАСТЯЖЕНИЯ С КРУЧЕНИЕМ ОДНОЙ СИСТЕМЫ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНО СОЕДИНЕННЫХ СТЕРЖНЕЙ

Одной из возможных причин потери устойчивости деформируемых механических систем является переход материала некоторых элементов системы на стадию деформационного разупрочнения, когда материал обладает внутренней неустойчивостью. В этом случае неустойчивость системы проявляется не в потере формы, а связана с резким падением несущей способности вследствие множественных повреждений или с разрушением.

Некоторые подходы к решению данной проблемы устойчивости дискретных систем, элементы которых находятся в условиях одноосного напряженного состояния, на основе методов теории катастроф приведены в работе [1]. В предлагаемой статье рассматривается система, состоящая из трубчатого образца и упругого стержня, которые испытывают растяжение и кручение. Сформулированы критерии устойчивости, приведена итерационная процедура определения деформированного состояния и установлено, что расходимость процесса вычислений связана с потерей устойчивости всей системы.

1. Рассмотрим механическую систему, осуществляющую растяжение и кручение специального трубчатого образца 1 (рис. 1), левый конец которого

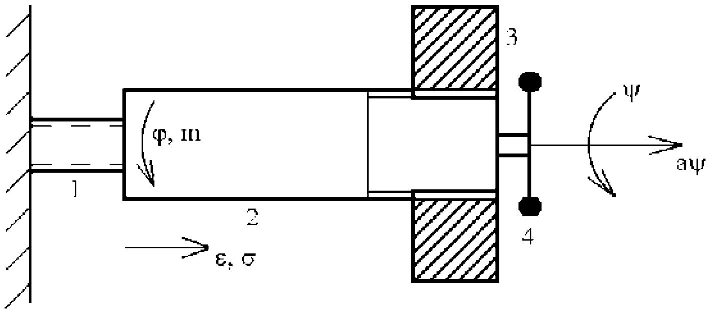

Рис. 1

неподвижен, а правый присоединен к упругому цилиндрическому стержню

2 с радиусом поперечного сечения r_c и длиной l. Образец имеет единичную длину и площадь поперечного сечения, равную единице. Правый конец упругого стержня вворачивается в абсолютно жесткую стенку посредством поворота рукоятки 4 на угол ψ. Шаг винта равен a, что обеспечивает горизонтальное перемещение на величину $a\psi$. При этом в образце возникают растягивающее напряжение σ и продольная деформация ϵ, касательное напряжение $\tau = m/k$ и сдвиговая деформация $\gamma = \varphi/z$. Здесь m, φ — соответственно крутящий момент и полный угол закручивания правого конца образца, значения параметров k, z определяются его внутренним и внешним диаметрами.

Переменные ϵ, γ естественно назвать параметрами состояния системы, а ψ — параметром управления. Нагружение осуществляется квазистатически, т.е. параметр ψ монотонно и равномерно возрастает с чрезвычайно малой скоростью.

Запишем уравнение равновесия данной системы:

$$Kp - \Lambda(At\psi - Ze) = 0, \tag{1}$$

где $K = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix}$; $\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$; $A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$; $Z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & z \end{pmatrix}$; $p = \begin{pmatrix} \sigma \\ \tau \end{pmatrix}$ и $e = \begin{pmatrix} \epsilon \\ \gamma \end{pmatrix}$ — вектор-столбцы напряжений и деформаций; $t = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Здесь $\lambda_1 = E_1F/l$; $\lambda_2 = G_1J/l$; G_1, E_1 — соответственно модули сдвига и Юнга материала упругого стержня; F, J — площадь и полярный момент инерции его поперечного сечения ($J = \pi r_c^4/2$). Произведение матриц и векторов понимается в обычном смысле.

Уравнение (1) представляет собой равенство нулю градиента некоторой функции $U(\epsilon, \gamma, \psi)$, а именно $\nabla U = 0$, где ∇ — вектор-столбец с компонентами $\partial/\partial\epsilon$, $\partial/\partial\gamma$. Совокупность параметров ϵ, γ, ψ — решений уравнения (1) определяет множество критических точек функции U, в которых система находится в положении равновесия. Смена устойчивых положений равновесия на неустойчивые и наоборот происходит в вырожденных критических точках — решениях системы (1) и уравнения, получающегося приравниванием к нулю детерминанта матрицы устойчивости H, или гессиана функции U [1,2]. В данной задаче

$$H = \frac{\partial}{\partial e}[Kp - \Lambda(At\psi - Ze)].$$

Компоненты матрицы Гессе тогда равны

$$H_{11} = c_{11}^p + \lambda_1, \quad H_{12} = c_{12}^p, \quad H_{21} = kc_{21}^p, \quad H_{22} = kc_{22}^p + z\lambda_2.$$

Здесь $c^p_{11} = \partial\sigma/\partial\epsilon$, $c^p_{12} = \partial\sigma/\partial\gamma$, $c^p_{21} = \partial\tau/\partial\epsilon$, $c^p_{22} = \partial\tau/\partial\gamma$. В дальнейшем полагаем $c^p_{12} = c^p_{21}$.

Итак, в вырожденной критической точке должно выполняться равенство

$$\det H = (c^p_{11} + \lambda_1)(kc^p_{22} + z\lambda_2) - k(c^p_{12})^2 = 0. \qquad (2)$$

Отсюда уравнение (2) определяет условие потери устойчивости процесса квазистатического нагружения системы. В этот момент любое сколь угодно малое увеличение параметра управления приводит к скачкообразному росту параметров состояния.

В трехмерном пространстве с координатами c^p_{11}, c^p_{22}, c^p_{12} уравнение (2) для заданных λ_1, λ_2 определяет коническую поверхность, состоящую из двух конусов с вершинами в точке O′ — пересечение прямых $c^p_{11} = -\lambda_1$, $c^p_{22} = z\lambda_2/k$ (рис. 2). Если параметры материала образца c^p_{11}, c^p_{22}, c^p_{12} таковы, что изобра-

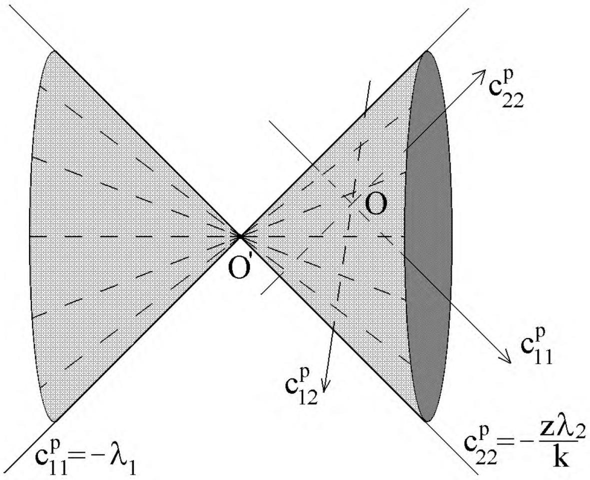

Рис. 2

жающая точка находится внутри конусов, то положение равновесия системы устойчивое, если вне конусов — то неустойчивое. Потеря устойчивости происходит тогда, когда изображающая точка попадает на коническую поверхность.

Отметим, что с увеличением жесткости упругого стержня устойчивость системы повышается. Параметры λ_1 и λ_2 возрастают и конус устойчивости расширяется.

2. Опишем свойства материала образца. В области упругости имеем $p =$

Ce, где $C = \begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & G \end{pmatrix}$. Здесь G, E — модули сдвига и Юнга материала. Полагаем, что пластические деформации не влияют на упругие характеристики материала, т.е. разгрузка определяется матрицей констант упругости C. Далее, в упругопластическом состоянии справедливо разбиение полных деформаций на сумму

$$e = e^e + e^p, \tag{3}$$

где e^e, e^p — вектор-столбцы соответственно упругих и пластических составляющих деформации. Тогда в упругопластической области связь между напряжениями и деформациями можно записать в виде [3]

$$p = C(e - e^p) = Ce^e. \tag{4}$$

Из выражения (4) вытекает, что приращение напряжений равно

$$dp = C(de - de^p) = Cde^e. \tag{5}$$

С другой стороны, справедливо инкрементальное соотношение [3]

$$dp = C^p de \tag{6}$$

или

$$d\sigma = \frac{\partial \sigma}{\partial \epsilon} d\epsilon + \frac{\partial \sigma}{\partial \gamma} d\gamma = c_{11}^p d\epsilon + c_{12}^p d\gamma,$$

$$d\tau = \frac{\partial \tau}{\partial \epsilon} d\epsilon + \frac{\partial \tau}{\partial \gamma} d\gamma = c_{12}^p d\epsilon + c_{22}^p d\gamma.$$

Отсюда C^p — симметричная матрица второго порядка с компонентами c_{11}^p, c_{22}^p, c_{12}^p. Приравнивая выражения (5) и (6), находим

$$de^p = (I - SC^p)de, \tag{7}$$

где I — единичная матрица второго порядка; S — диагональная матрица второго порядка модулей податливости с компонентами $S_{11} = 1/E$, $S_{22} = 1/G$ $(S = C^{-1})$.

3. Дадим теперь определение устойчивости в смысле Ляпунова.

Определение 1. *Положение равновесия системы является устойчивым, если для всякого $\delta > 0$ можно указать $\chi_1 > 0$ и $\chi_2 > 0$ такие, что из неравенства $|d\psi| < \delta$ следуют неравенства $|de| < \chi_1$, $|de^p| < \chi_2$, где de, de^p связаны друг с другом равенством (7) и с $d\psi$ уравнениями равновесия.*

Запишем уравнение равновесия в приращениях, используя соотношение (5). Имеем

$$KC(de - de^p) - \Lambda(Atd\psi - Zde) = 0. \qquad (8)$$

Его решение равно

$$de = SP_1\Lambda Atd\psi + SP_1KCde^p, \qquad (9)$$

где $P_1 = C(KC + \Lambda Z)^{-1}$. Подставляя в (9) выражение (7), получаем

$$de = (Stru)^{-1}SP_1\Lambda Atd\psi,$$

где матрица $Stru = I - SP_1KC + SP_1KC^p$. Производя преобразования, находим, что

$$de = H^{-1}\Lambda Atd\psi, \qquad (10)$$

где $H^{-1} = D/\det H$. Здесь D — матрица второго порядка с компонентами $D_{11} = kc^p_{22} + z\lambda_2$, $D_{12} = -c^p_{12}$, $D_{21} = -kc^p_{12}$, $D_{22} = c^p_{11} + \lambda_1$. Таким образом, согласно определению положение равновесия системы становится неустойчивым, когда $\det H = 0$.

Примечание. Матрицу $Stru$ также можно назвать матрицей устойчивости. Имеем $(Stru)^{-1} = Y/\det(Stru)$ и

$$\det(Stru) = \frac{\det H}{(E + \lambda_1)(kG + z\lambda_2)}.$$

Отсюда

$$(Stru)^{-1} = \frac{(E + \lambda_1)(kG + z\lambda_2)Y}{\det H},$$

и устойчивость теряется при $\det H = 0$ или $\det(Stru) = 0$. Здесь Y — матрица с компонентами

$$Y_{11} = (kc^p_{22} + z\lambda_2)(kG + z\lambda_2)^{-1}, \quad Y_{12} = -c^p_{12}(E + \lambda_1)^{-1},$$

$$Y_{21} = -kc^p_{12}(kG + z\lambda_2)^{-1}, \quad Y_{22} = (c^p_{11} + \lambda_1)(E + \lambda_1)^{-1}.$$

4. Рассмотрим далее один образец, нагружаемый по жесткой схеме заданием фиксированных значений ϵ, γ. Введем функционал в виде разности квадратичных форм

$$\rho = de^TCde - (de^p)^TCde^p, \qquad (11)$$

где de, de^p связаны соотношением (7). Слагаемые в выражении (11) означают соответственно энергию приращения полных и пластических деформаций.

Определение 2. *Если энергия приращения полных деформаций больше энергии приращения пластических деформаций* ($\rho > 0$), *то состояние материала образца устойчивое* (*упрочнение*), *если меньше* ($\rho < 0$) *— то неустойчивое* (*разупрочнение*).

Покажем эквивалентность сформулированного ρ-критерия известному условию устойчивости неупругого материала Друккера [4]. Преобразуем выражение (11), используя равенства (3) и (5). Имеем

$$\rho = (de^e + de^p)^T C(de^e + de^p) - (de^p)^T C de^p = \\ = 2dp^T de^p + dp^T de^e = dp^T de^p + dp^T de. \qquad (12)$$

Отсюда, когда условие Друккера, записанное для данного случая, выполняется ($dp^T de^p > 0$, $dp^T de > 0$), то и $\rho > 0$. В противном случае $\rho < 0$.

Обратно, если $\rho > 0$, то, используя равенства (12), (7), (6), получаем

$$dp^T(de + de^p) = dp^T(de + de - SC^P de) = 2dp^T de - dp^T S dp > 0.$$

Так как $dp^T S dp > 0$, то $dp^T de > 0$. Если выполнено условие $\rho < 0$, то

$$dp^T(de + de^p) = dp^T(de^e + 2de^p) < 0.$$

В силу того что $dp^T de^e = (de^e)^T C de^e > 0$, имеем $dp^T de^p < 0$.

Сформулируем определение устойчивости положения равновесия образца при жестком нагружении.

Определение 3. *Положение равновесия образца при жестком нагружении является устойчивым, если для всякого* $\delta > 0$ *можно указать* $\chi > 0$ *такое, что из неравенства* $|de| < \delta$ *следует неравенство* $|de^p| < \chi$.

Таким образом, неравенство $\rho < 0$ представляет только необходимое условие для потери устойчивости процесса деформирования образца. Достаточным же условием является выполнение равенства

$$\frac{de^p}{de} = \infty \qquad (13)$$

или $\rho = -\infty$, то есть потеря устойчивости происходит тогда, когда бесконечно малое увеличение полных деформаций приводит к возникновению конечных или бесконечных пластических деформаций. Для образца условие (13) выполняется, если хотя бы одна компонента матрицы C^p становится равной $(-\infty)$.

Когда $C^p = 0$, то $\rho = 0$ и $de^p = de$. В этом случае имеет место либо идеальная пластичность образца (текучесть), либо он уже разделен на не связанные между собой фрагменты и не сопротивляется деформированию (разрушение).

Исследуем теперь на устойчивость положение равновесия системы. Возмутим это положение, увеличив угол поворота рукоятки на $d\psi$. Опираясь на равенство (11), запишем R-сумму системы

$$R = de^T C de - (de^p)^T C de^p + (Atd\psi - Zde)^T \Lambda (Atd\psi - Zde), \qquad (14)$$

где последнее слагаемое определяет потенциальную энергию упругого стержня, $d\psi$, de, de^p связаны уравнением равновесия (8) и условием (7). Используя решение (10), находим

$$R = \frac{d\psi^2}{(\det H)^2}[(D')^T C D' - (D' - SC^p D')^T C (D' - SC^p D') + \\ + (\Lambda t \det H - ZD')^T \Lambda (\Lambda t \det H - ZD')],$$

где $D' = DA\Lambda t$.

Из рассуждений, изложенных выше при анализе устойчивости образца, и вида функционала R (14) следует, что при $R > 0$ деформирование системы идет с накоплением энергии деформаций. Когда $R < 0$, то энергия деформаций убывает, и это условие является необходимым для потери устойчивости. Потеря устойчивости наступает при $R = \infty$, когда $\det H = 0$. В этот момент энергия в системе уменьшается скачкообразно.

5. И наконец, рассмотрим итерационную процедуру определения напряжений и деформаций при квазистатическом возрастании параметра управления. Запишем исходное уравнение равновесия (1), используя выражение (4), в виде

$$KC(e - e^p) - \Lambda(At\psi - Ze) = 0. \qquad (15)$$

Разобьем исходную задачу на две, а именно основную

$$KCe' - \Lambda(At\psi - Ze') = 0 \qquad (16)$$

и корректирующую

$$KC(g - e^p) + \Lambda Z g = 0, \qquad (17)$$

где g — вектор-столбец деформаций с компонентами: $g_1 = q$ — продольная деформация, $g_2 = \theta$ — деформация сдвига. Решение уравнения (16) — $e' = SP_1\Lambda At\psi$, решение уравнения (17) — $g = P_1 K e^p$. Непосредственно проверяется, что $e = e' + g$ есть решение уравнения (15).

Пусть для некоторого ψ в положении равновесия имеем параметры состояния, определяемые вектором e. Возмутим данное положение равновесия, увеличив параметр управления на $\Delta\psi$. Для нахождения характеристик нового положения равновесия применим следующую итерационную процедуру:

– решаем основную задачу для $\psi = \Delta\psi$ и получаем e'_Δ, затем находим значение $\eta_1 = e + e'_\Delta$, которое принимаем за первое приближение к решению исходной задачи;

– по формуле (7), где $de = e'_\Delta$, рассчитываем значение de_1^p;

– решаем задачу (17) при $e^p = de_1^p$, получаем g'_1 и осуществляем корректировку, то есть находим второе приближение $\eta_2 = \eta_1 + g'_1$;

— по формуле (7), где $de = g'_1$, рассчитываем значение de_2^p и повторяем всю процедуру.

Представим данный итерационный процесс в виде ряда

$$\eta_n = e + \sum_{k=1}^{n} B^{n-1} e'_\Delta, \tag{18}$$

где $B = P_1 K(I - SC^p)$, $B^0 = I$. Оценим спектральный радиус $\rho(B)$ матрицы B. Используя выражение для спектра квадратной матрицы [5], имеем

$$\sigma(B) = \frac{1}{2}[(a_1 + a_2) \pm \sqrt{(a_1 - a_2)^2 + 4(c_{12}^p)^2/(E + \lambda_1)(G + z\lambda_2/k)}],$$

где $a_1 = (E - c_{11}^p)/(E + \lambda_1)$, $a_2 = (G - c_{22}^p)/(G + z\lambda_2/k)$. Отметим, что, в силу положительности подкоренного выражения, собственные значения матрицы B вещественны, причем по крайней мере одно из них положительно.

Если материал образца находится в области упругости, когда $C^p = C$, то собственные значения матрицы B равны нулю. Далее, в области упрочнения имеем $0 < c_{11}^p < E$, $0 < c_{22}^p < G$. Кроме того, при возрастании параметра управления компоненты матрицы C^p стремятся к нулю и принимают нулевые значения в момент перехода материала образца на стадию разупрочнения. В этот момент собственные значения равны

$$0 < b_1 = E/(E + \lambda_1) < 1, \qquad 0 < b_2 = G/(G + z\lambda_2/k) < 1.$$

Затем на стадии разупрочнения образца собственные значения возрастают и одно из них достигает единицы, когда $\det H = 0$. Действительно, в этом случае

$$\det|B - I| = \frac{\det H}{(E + \lambda_1)(G + z\lambda_2/k)},$$

и единица будет собственным числом, если $\det|B - I| = 0$.

Итак, до того момента, когда $\det H = 0$, либо оба собственных числа положительны и меньше единицы, либо одно положительно и меньше единицы, а второе отрицательное. Пусть $0 < b_1 < 1$, а $b_2 < 0$. В этом случае из равенства [5] $b_1 + b_2 = \mathrm{tr} B = a_1 + a_2$, где tr — след матрицы, $a_1 + a_2 \geq 0$, следует, что $b_2 > -b_1 > -1$.

Таким образом, $\rho(B) < 1$, если $\det H > 0$, и $\rho(B) = 1$, если $\det H = 0$. Когда $\|B\| = \rho(B) < 1$, то, согласно принципу сжимающих отображений, ряд (18) сходится. Расходимость начинается, когда $\|B\|$ становится равной единице ($\det H = 0$). Очевидно, что начало расходимости отвечает моменту потери устойчивости всей системы.

Литература

1. Стружанов В. В., Миронов В. И. Деформационное разупрочнение материала в элементах конструкций. Екатеринбург: Изд-во УрО РАН, 1995.
2. Гилмор Р. Прикладная теория катастроф. М.: Мир, 1984. Т.1.
3. Стружанов В. В. Ассоциированный и инкрементальный законы пластического течения для сред, проявляющих деформационное разупрочнение. // Изв. Урал. гос. ун-та. 1998. №10. (Математика и механика. Вып.1.) С.92–101.
4. Друккер Д. Определение устойчивого неупругого материала. // Механика [сб. переводов иностр. ст.] 1960. Т.2, №2. С.55–70.
5. Хорн Р., Джонсон Ч. Матричный анализ. М.: Мир, 1989.

Статья поступила 04.03.2000 г.